# TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LAS SEÑALES Y LOS SISTEMAS

Introducción a las señales y los sistemas: concepto de señal y sistema; clasificación de las señales; operaciones básicas en las señales; señales elementales; propiedades generales de los sistemas.

## CONCEPTO DE SEÑAL

Función de una o más variables que lleva información acerca del proceso físico o matemático al que representa.

## CONCEPTO DE SISTEMA

Dispositivo físico u operador matemático que transforma una señal de entrada en una señal de salida.

## CLASIFICACIÓN DE SEÑALES

### Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto

- Señales en tiempo continuo: $x(t)$ está definida para todo tiempo $t$

- Señales en tiempo discreto: $x[n] = x(nT_s)$ secuencia definida para $n \in \mathbb{Z}$, $T_s$ periodo de muestreo.

### Señales pares e impares

- Señal Par: $x(t) = x(-t)$, $x[n] = x[-n]$

- Señal Impar: $x(t) = -x(-t)$, $x[n] = -x[-n]$

$$x(0) = 0,\ \ x[0] = 0$$

Toda señal puede escribirse como la suma de una señal par y una impar:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t); \quad \begin{cases} x_p(t) = \dfrac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) \\ x_i(t) = \dfrac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) \end{cases}$$

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]; \quad \begin{cases} x_p[n] = \dfrac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \\ x_i[n] = \dfrac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$

### Simetría conjugada

Señales de valor complejo: $\begin{cases} x(t) = a(t) + jb(t) \\ x[n] = a[n] + jb[n] \end{cases}$

- Simetría conjugada: $x(t) = x^*(-t)$
  - $a(t)\ par$
  - $b(t)\ impar$

### Señales periódicas

- Una ***señal continua***, $x(t)$, es periódica si satisface la condición:

$$x(t) = x(t+T)\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad T > 0$$

  Si $x(t)$ es periódica con periodo $T$, también será periódica de periodo $mT,\ m \in \mathbb{Z}$

- Una ***señal discreta***, $x[n]$, es periódica si satisface la condición:

$$x[n] = x[n+N] \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \ N \in \mathbb{N}\ \ (N > 0)$$

  Si $x[n]$ es periódica con periodo $N$, también será periódica de periodo $mN,\ m \in \mathbb{Z}$

  El valor más pequeño de $T$ y $N$ que satisface la igualdad se conoce como *periodo fundamental*. La *frecuencia angular* viene dada por:

$$Continua: \omega = \frac{2\pi}{T}\ rad/s; \qquad Discreta: \Omega = \frac{2\pi}{N}\ \ rad$$

## PARÁMETROS DE INTERÉS DE LAS SEÑALES

Existen una serie de medias que proporcionan información sobre la naturaleza y la magnitud de las distintas señales. Las principales son:

- **Valor medio**: es la media temporal de la amplitud de la señal
  - Señales continuas
    - Intervalo finito: $\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$ o $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$
    - Intervalo infinito: $\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$
    - Si señal periódica: $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t)dt$

– Señales discretas

• Intervalo finito: $\bar{x} = \frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$ o $\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]$

• Intervalo infinito: $\bar{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]$

• Si señal periódica: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]$

▪ **Valor pico**: valor máximo del módulo de la señal

– Señales continuas

• $x_p = max|x(t)|,\ t \in \mathbb{R},$

– Señales discretas

• $x_p = max|x[n]|,\ n \in \mathbb{Z},$

▪ **Potencia instantánea**: potencia en un instante dado

– Señales continuas

• $P_i = |x(t)|^2$

– Señales discretas

• $P_i = |x[n]|^2$

▪ **Energía**: medida cuadrática y no negativa

– Señales continuas

• $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2$

– Señales discretas

• $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

▪ **Potencia**: medida cuadrática y no negativa de interés para señales de energía infinita y representa la energía por unidad de tiempo

– Señales continuas

• Señal aperiódica: $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$

• Señal periódica: $P_x = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt$

- Señales discretas
  - Señal aperiódica: $P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$
  - Señal periódica: $P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2$

- **Tres clases importantes de señales:**
  - *Señales de energía:* señales de energía finita y potencia media nula, $0 < E_x < \infty;\ P_x = 0$
  - *Señales de potencia*: señales de potencia media finita y energía infinita, $0 < P_x < \infty;\ E_x = \infty$
  - Si no satisfacen ninguno de los requisitos anteriores no se consideran ni de energía ni de potencia, $E_x = \infty; P_x = \infty\ (x(t) = t)$

## OPERACIONES SOBRE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Cómo cambia $x(t)\ o\ x[n]$ cuando se transforma $t\ o\ n$

### Desplazamiento temporal:

$$\boldsymbol{x(t) \to x(t-t_0)}; \qquad \boldsymbol{x(n) \to x(n-n_0)}$$

- Retraso si: $t_0 > 0;\ n_0 > 0$
- Adelanto si: $t_0 < 0;\ n_0 < 0$

### Reflexión (también inversión temporal):

- $y(t) = x(-t)$
- $y[n] = x[-n]$

### Escalado temporal:

- $y(t) = x(at); \quad \begin{cases} a > 1, & y(t)\ es\ una\ versión\ comprimida\ de\ x(t) \\ 0 < a < 1, & y(t)\ es\ una\ versión\ expandida\ de\ x(t) \end{cases}$

## SEÑALES ELEMENTALES

### Señales exponenciales continuas:

- Exponencial compleja: (forma general de la señal)

$$x(t) = Ae^{st}, \quad A, s\ complejos\ y\ s = \sigma + j\omega$$

- $Si\ \sigma = 0,\ s = j\omega \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Ae^{j\omega t} = A\cos(\omega t) + j\,A\sin(\omega t)\,,\ \omega \in \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{j\omega t}, periódica\ \forall\omega\ y\ T = \frac{2\pi}{\omega};\quad T|_{\omega} = T|_{-\omega}$$

- $Si\ A\ real\ y\ s = \sigma \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Ae^{\sigma t}$

$\sigma < 0,\quad exponencial\ real\ decreciente$
$\sigma > 0,\quad exponencial\ real\ creciente$
$\sigma = 0,\qquad constante$

- Exponenciales complejas relacionadas armónicamente:
  $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t},\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

## Señales exponenciales discretas:

- Exponencial compleja: (forma general de la señal)
  $x[n] = Ar^n,\ \ A, r\ complejos\ y\ r = e^{\beta} \Rightarrow x[n] = Ae^{\beta n}$

- $Si\ |r| = 1 \quad \Longrightarrow \quad x[n] = Ae^{j\Omega n} = A\cos(\Omega n) + jA\sin(\Omega n)\,,\quad \Omega \in \mathbb{R}$

  - Periodicidad: $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}$

  - $e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n},\ \ \Omega \in \mathbb{R}$. Exponenciales complejas discretas separadas múltiplos enteros de $2\pi$ son indistinguibles, es decir, una exponencial discreta a frecuencia $\Omega$ es idéntica a una de frecuencia $\Omega + 2\pi$

  - Sólo es necesario analizar las exponenciales complejas en un intervalo frecuencial de longitud $2\pi$ ($[0,\ 2\pi]\ o\ [-\pi,\ \pi]$)

  - A diferencia del caso continuo, el periodo $N$ no disminuye cuando $\Omega$ crece ($\mathrm{N_{min}} = \mathrm{N_{\omega=\pi}};\ \mathrm{e^{j\pi n}} = (-1)^{\mathrm{n}}$

- $Si\ A\ y\ r\ reales$

$|r| > 1,\ \ exponencial\ real\ creciente$
$|r| < 1,\ \ exponencial\ real\ decreciente$
$r = 1,\qquad constante$
$r < 0,\qquad signo\ alternante$

- Exponenciales complejas relacionadas armónicamente:
  $\phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n},\quad k = 0,\qquad \pm 1,\qquad \pm 2, \ldots$

Sólo existen $N$ exponenciales complejas discretas relacionadas armónicamente (periódicas de periodo $N$)

## Función impulso unitario y escalón unitario discreto:

- Función impulso unitario:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Función escalón unitario:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

## Función impulso unitario y escalón unitario continuo:

- Función impulso unitario:

$$\delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \ \ y \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Propiedades:

- *Muestreo (multiplicación por una función)*

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$$

$$f(t)\,\delta(t - t_0) = f(t_0)\,\delta(t - t_0)$$

- *Integración*

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- *Selección*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

- *Escalado*

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$$

- *Paridad*

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

- *Función escalón unitario:*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

## PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS

**Memoria:** En un sistema **sin memoria** la salida en cada instante de tiempo $(t_0, n_0)$ depende únicamente de la entrada en ese mismo instante de tiempo $(t_0, n_0)$. En un sistema **con memoria** la salida en cada instante de tiempo depende de la entrada en al menos un instante de tiempo diferente (independientemente de que también dependa del actual).

**Causalidad:** un sistema es **causal** si la salida en cualquier instante de tiempo depende únicamente de valores de la entrada en el momento presente y en el pasado $(y(t_0)$ depende de $x(t)$ para $t \leq t_0)$ y será **anticausal** si la salida en cualquier instante de tiempo depende solamente de valores de la entrada en momentos futuros $(y(t_0)$ depende de $x(t)$ para $t > t_0)$.

**Invertibilidad:** un sistema es **invertible** si hay una relación biunívoca entre la entrada y la salida (Si $x_1(t) \neq x_2(t)$ entoces $y_1(t) \neq y_2(t)\ \forall t$, es decir, cada entrada proporciona una salida distinta. Por lo tanto, existe un sistema inverso que permite recuperar la entrada:

$Si\ y(t) = S\{x(t)\},\ \exists S^{-1}/S^{-1}\{y(t)\} = x(t),$ siendo $S$ el operador que describe al sistema

**Estabilidad:** diremos que un sistema es **estable** si para una entrada acotada el sistema responde con una salida acotada:

$$Si\ |x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| < B_y, \forall t$$

**Linealidad:** un sistema es **lineal** si cumple la propiedad de superposición, es decir, si la señal de entrada es una combinación lineal o superposición de varias señales, la salida será la misma combinación lineal de las respuestas del sistema a cada una de las señales:

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

**Invarianza temporal:** un sistema es **invariante** en el tiempo si un desplazamiento en la señal de entrada conlleva el mismo desplazamiento en la salida, es decir, si sus propiedades se mantienen constantes con el tiempo:

$$Si\ x(t) \longrightarrow y(t) \Longrightarrow\ x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0)$$